函数体の有理性の問題 (コンパクト複素解析多様体研究会報告集)

飯高, 茂

数理解析研究所講究録
68巻 1969年 76-99

函数体の有理性の問題

東京大学 理　飯高 茂

§1. 序

有限生成の体拡大K/kが与えられたとき，次の定義をしよう。

定義：K/k：有理的（又はKはk上の有理函数体）$\Leftrightarrow$

Kはk上純粋超越拡大

さて自然に我々は次の素朴な問題に導かれる。

問題I. 有理的拡大の有効な判定法を与えよ。

ここで有効とは，種々の例に対して決定的な効力を発揮するもの，と理解しておこう。例えば次のような例である。

例1. k：代数閉体，$K_{n,d} = k(x_1,\cdots,x_{n+1})$，この変数は唯一つの関係式 $x_1^d+x_2^d+\cdots+x_{n+1}^d=1$，（$k$の標数は$d$をわらない）をもつ。さて，

$$K_{n,d}/k \text{ 有理的} \Rightarrow n+2>d$$

であることは容易にわかるが，$n \geqq 3$ のとき，逆が成立するかどうか，とくに $d \geqq 3$ なら，実際的に有理的であることが確められているものは一つとしてない．とくに $n=3$, $d=4$ は，非有理的（単有理ですらない）と想像されるが，極めて困難の問にみえる．（[14] p17 をみよ．）

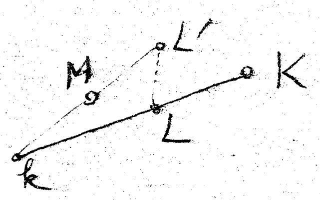
例2. K/k：有理的のとき，K/L：分離的 なる K/k の中間体 L をとると，L/k は有理的であろうか？ このような拡大を 単有理的（uni-rational），又 L は k 上単有理函数体とよぶ．$\dim_k L = 1, 2$ なら，たしかに有理的になるが一般には反例すら一つも知られていない．いわゆる Lüroth の問題で極めて難しいとされている．やさしい例をあげる．

$K = k(x_1, \dots, x_m)/k$ を有理函数体とするとき，$\{x_1, \dots, x_m\}$ の置換として，対称群 G が作用する．$\{x_1, \dots, x_m\}$ の基本対称式を $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ とおくと，$K^G = \{G$–不変の K の元全体$\} = k(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ でこの時は目出度く K^G/k：有理的．又，$H = \{\sigma^k\,(0 \leq k \leq m-1;\ \sigma x_i = x_{i+1}\,(i = 1, 2, \dots, m;\ x_{m+1} = x_1))\}$ とおき，K^H を考える．k の標数が m をわらぬとする．1 の原始 m 乗根 ζ をとり，Lagrange の分解式 $y_i = x_1 + \zeta^i x_2 + \zeta^{2i} x_3 + \cdots + \zeta^{(m-1)i} x_m$ $(1 \leq i \leq m)$ をつくると，$\sigma y_i = \zeta^{-i} y_i$．又 $k(x_1, \dots, x_m) = k(y_1, \dots, y_m)$．そこで，$z_1 = y_1^m$, $z_2 = y_2/y_1^2$, $\dots$, $z_{m-1} = y_{m-1}/y_1^{m-1}$, $z_m = y_m$ をつくると，皆 K^H の元．$K - K^H - k(z_1, \dots, z_m)$

$m = [K : K^H] = [K : k(z_1, \cdots, z_m)]$ により, $K^H = k(z_1, \cdots, z_m)$.
かくてこの時も有理的となった。しかし, A を G の偶置換よりなる交代群とするとき, K^A/k : 有理的か? は現在手のつけようもない難問であるらしい。δ を $x_1, \cdots, x_m$ を根とした方程式の判別式とするとき $K^A = k(\sigma_1, \cdots, \sigma_m, \sqrt{\delta})$ ではあるが (m=1,2,3 なら明らか)

例3. 永田先生は, [13] に於て次の定義をした。

定理: K/k : 擬有理的 $\Longleftrightarrow$ k と異なる中間 L には必ず有限代数拡大 L'/L が存在し, L' は L'/k の中間 M 上一変数有理函数体となる ($L' = M(t)$).



永田先生の基本定理によると, 單有理的なら擬有理的であった。この逆の反例は一つも知られていない。ただ, $\dim_k K = 1, 2$ なら, 擬有理 $\Rightarrow$ 有理, となる。これは後にみるであろう。

このように問題への解答は3次元以上の場合全く知られていないといってよく, また純粋に代数の問題にみえても現状では幾何的, とくに代数幾何学的に考察しなければ手のつけようもない。いや, 代数幾何の発祥の地はこのような問題を解決する努力の中にもあったのである。

§2. 代数幾何的取扱い.

以後基礎の体 k を代数的閉体として固定して考察する.

k 上の非特異射影多様体 V/k が体 K/k のモデルであるとは, その有理函数のつくる体 $k(V)$ が K と k 上同型のことをさす. すると, モデルは双有理同値を除いて唯一つ定まる.* $\Omega^n = \Omega^n_V$ を V 上の, 正則 n 型式の芽のつくる層とするとき, すべては 0 でない非負整数 $\kappa_1, \cdots, \kappa_n$ $(n = \dim V)$ に対して, 多重種数 $P_{\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n}$ を

$$P_{\kappa_1, \kappa_2, \cdots, \kappa_n} = \dim H^0(V, (\Omega^1)^{\otimes \kappa_1} \otimes (\Omega^2)^{\otimes \kappa_2} \otimes \cdots \otimes (\Omega^n)^{\otimes \kappa_n})$$

で定義する. すると次の基本性質が容易にわかる.

i) $V \longrightarrow V'$ に, 有限分離的有理写像があれば,

$P_{\_\_\_}(V) \geq P_{\_\_\_}(V')$. ($\kappa_1 \cdots \kappa_n$ を —— で略記した.)

この系として.

ii) $P_{\_\_\_}(V)$ は, 双有理不変量である. それ故体のみを記して $P_{\_\_\_}(K)$ ともかく.

iii) $P_{\kappa_1, \cdots, \kappa_{n+1}}(K(t)) = 0$, もし $\kappa_{n+1} > 0$,

$P_{\kappa_1, \cdots, \kappa_n, 0}(K(t)) = P_{\kappa_1, \cdots, \kappa_n}(K)$.

ここで t は K 上の超越元, $n = \dim K$.

この系として,

iv) K/k : 有理的なら $P_{\_\_\_}(K) = 0$.**

** もっとも i) によれば, K/k : 単有理的なら $P_{\_\_\_}(K) = 0$ ではあるが.

* ch $k \neq 0$ のときは証明されていないこと無論である.

又例1の $K_{n,d}/k$ は，$n+2>d \Leftrightarrow P\_\_(K_{n,d})=0$ である．それ故 iv) の逆が成たつかどうかは基本的課題でもしいえれば，問題 I はほぼ完全にとかれたといってよい．勿論 $n=1,2$ の時は とけている．

$n=1$ のとき．$g=P_1$ とおき K の種数とよぶ．

$g=0 \Leftrightarrow K/k$：有理的．

$n=2$ のとき，$P_2=P_{0,2}$ とおき K の2種数 (bigenus)，$q=P_{1,0}$ とおき K の不正則数とそれぞれよぶ．すると，Castelnuovo による判定法は，

$P_2=q=0 \Leftrightarrow K/k$：有理的．[16]

さてこれらを用いて，$\underbrace{\text{例2}}_{n=1,2\text{のとき}}$ を解いてみよう．k 上の函数体 K，L があり，$K \supset L$，(分離的) $\dim K=n+m$，$\dim L=n$ とすると，$P_{\kappa_1,\cdots,\kappa_n}(L) \leqq P_{\kappa_1,\cdots,\kappa_n,0,\cdots,0}(L)$ となる．これは，L に超越元 $t_1,\cdots,t_n$ をとり $K/L(t_1,\cdots,t_n)$ を有限分離拡大となるようにして i)，iii) を用いればよいのである．さて K/k：単有理なら $P\_\_(K)=0$，よって $P\_\_(L)=0$，それ故上記の判定法により $n=1,2$ の時は L/k：有理的 がわかる．

また例3を解くこともできる．例3の記号のままで，$L=K$ とおくと，その有限代数拡大 $L'=M(t)$ があるから，$\kappa_n>0$ として $P_{\kappa_1,\cdots,\kappa_n}(K) \leqq P_{\kappa_1,\cdots,\kappa_n}(M(t))=0$．そこで $n=1$ なら，K/k：有理的がわかる．また，K/k：擬有理的なら

明らかにその中間体 L/k も擬有理的であることに注意する。
そして $n=2$ のとき、$P_{0,2}(K)=0$、それ故 $q(K)=P_{1,0}(K)>0$ なら K の非特異射影モデル V をつくり、Albanese map $\alpha: V \longrightarrow \Delta$ をつくる。Δ の種数は q、α: 全射、よって $K=k(V)\supset k(\Delta)\supset k$、さて $k(\Delta)/k$ は擬有理的だから、有理函数体、$q=0$ となる。よって $q(K)=0$. Castelnuovo の判定法によれば、K/k: 有理的.

さて Castelnuovo の判定法は古典代数曲面論の最初の最大の成果といってもよく、証明は本質的に難しい。その証明の機構は次のようになっている。

$$\begin{array}{ccc}
P_2=q=0 & \overset{\text{Castelnuovo}}{\Longrightarrow} & \begin{array}{l} V\supset C,\ \dim|C|\geqq 1 \\ C:\text{既約},\ \pi(C)=0 \\ \text{なる } C \text{ の存在.}\end{array} \\
\text{trivial}\ \Nwarrow & & \Swarrow\ \text{Noether} \\
& K/k:\text{有理的} &
\end{array}$$

$P_2=q=0$ のような判定法を Numerical criterion、曲線 C の存在のような判定法を Geometric criterion とよぶことにしよう。M. Noether は Geometric criterion の十分条件を示し、Castel-

6

nuovo は Numerical criterion から Geometric criterion を示し, 合せてこれらの criterion が必要十分条件であることを示したのである.* ここで奇妙なことは, Geometric criterion の必要性が, Numerical criterion を経由していることで, これによらない直接的証明が得難いことは, 問題の複雑さ —— 一見は簡単明瞭であっても —— を示すものかもしれない.

さて我々の主たる関心は, Noether's part —— Geometric criterion の十分条件 —— を拡張することにある. 例えば, 次の定理が成立する.

定理: V に一次系 $|Z|$ が存在し, その一般元 Z は, 射影空間 P^{n-1} $(n = \dim V)$ と同型, $\dim |Z| \geq 1$, かつ, $|Z|$ に底点がなければ, $k(V)/k$ は有理函数体である.

曲線の場合は, 有理曲線は(非退化なら)唯一つであるし, それは $\mathbb{P}^1$ である. 従って高次元への拡張としては, 無数に, 双正則で異なる有理多様体がある以上, $\mathbb{P}^{n-1}$ として一般化することは余りにも強いし, 事実, 必要条件を与えるものでは全くない. しかし, $|Z|$ から有理写像をつくり, $|Z|$ に底点のないことから それが正則で, その逆像が Z となるの

* もっともこれらの古典的証明は, 現代的観点からは不可解な点が多いという. 短い証明は [9] をみよ.

だから，次のように素朴な問題を設定しよう．

問題II．X，Yを，代数的多様体，$f: X \longrightarrow Y$，固有的
ある閉点 $y \in Y$ で $Z = f^{-1}(y)$ が，非特異有理多様体とする
と $k(X)/k(Y)$：有理的か？

さて，応用上は（定理のように）一次元を考えるから，Yはとくに代数曲線としてよい．すると，$K=k(Y)$ は，いわゆる C_1-体となる。いいかえると，$K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ の斉次多項式 f は，その次数が n 以下ならつねに，全部が0ではないKの元 $x_0, x_1, \dots, x_n$ があって $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ となるのである．便宜上例をあげよう．

例4．$z^2 - xy(1+x+y)(1+ax+by) = 0$；$a, b \in k$ は有理曲面を定める；この式は多重特異点を沢山もつから非特異射影モデルをつくって p_g, q をかぞえようと思うと大変であるが，双有理変換 $(x, y, z) \to (x, Y, Z)$；$Z = z/x$, $Y = y/x$ を行うと，

$$Z^2 = Y(1+x+xY)(1+ax+bxY)$$

となる．$K=k(Y)$ 上 Z, x の2次曲線とみなせ，かつそれは C_1-体の性質からK有理点をもつから，$L=k(x, y, z)$ はK上有理的．

例5．K：C_1-体とするとき，SをK上の有理曲面，即ち，Kの閉包$\bar{K}$まであげると $S_{\bar{K}}$ は$\bar{K}$上の有理多様体となる

る，ならば，

Манин の予想：SはK有理点をもつ。[12]

たとえば，$p_K^{(1)}$ = S をK上で極小モデルにちぢめたときの c_1^2+1，と S/K の linear genus を定義するとき，

① $ch(K)=0$，$p_K^{(1)}(S)\neq 1$ ならSはK有理点をもつ。

② SはK上ある曲線の上にK正則写像をもつ，このときSはK有理点をもつ。[12]

また，V/k：有理的なら $H^0(V,\Omega^i)=0$ $(i\geq 1)$ だから $H^i(V,\mathcal{O}_V)=0$ $(i\geq 1)$ も大丈夫らしい。そこで

Serre の予想：V/K，K：C_1−体のとき，$H^i(V,\mathcal{O}_V)=0$ $(i\geq 1)$ ならVはK有理点をもつ。[4]5 Exp III Formule de Lefschetz Verdier p29.

とくにK：有限体ならC_1−体で，この時は，Lefschetz の公式をスキーム論の立場で拡張した Lefschetz Verdier の公式より直ちに示される。また，Vが，$\mathbb{P}^{n+r}$ 内の次数 $d_1,\dots,d_n$ 次の完全交差形なら，$H^n(V,\mathcal{O}_V)=0 \Leftrightarrow n+r+1-\sum d_i>0$ で，この後者の条件は，丁度C_1−体が零点をもつ条件なのであった。

例6. K：C_1−体なら，$H^i(K,G_m)=0$ $(i\geq 1)$，もっとも一般の体で $H^1(K,GL(n))=0$ であった。このコホモロジーは，Kの分離閉包K'でのガロアコホモロジーである。[同

§3. 定理I, 定理II。

問題IIは否定的であろうが, 次のような時はもっともらしい。

予想. X, Y：非特異の代数多様体, とくにYは曲線, $f: X \longrightarrow Y$, は固有的, ある閉点$y \in Y$で$Z = X_y$は, 有理的かつ, $H^1(Z, \Theta_Z) = 0$, この時 $k(X)/k(Y)$：有理的.

ここに, $\Theta_Z = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Z, \Omega^1_Z)$.

さて予想は次の時に成立する。

定理I i) $Z = \mathbb{P}^{n-1}$, Q^{n-1} (quadrics), $\mathbb{P}^{2}\times\cdots$ の時予想が成立する。

ii) $n = \dim X = 3$ の時, ($c_1^2(Z) = 4$, $\mathrm{ch}\, k = 5$ を除外すると) 予想は成立する。

もっとも予想の条件はよいものではない。なぜなら次の定理が成立するから

定理II. Zが$\mathbb{P}^1$上の$\mathbb{P}^{n-2}$-bundleでも$k(X)/k(Y)$有理的となる。

(しかし, $\dim H^1(Z, \Theta)$は随分大きなものである。)

$n=3$, 従ってZ：有理曲面の時は, よくわかっている曲面 /

論がつかえるが，一般次元では，formal schemeの理論に由らねばならない．必要なのはEGA III §4, 5の完備局所環上のusual schemeとformal schemeの比較定理，及びSGA 1のexp. 3のobstruction theoryである．予想の条件下で考えていく．

$o = \mathcal{O}_{Y,y}$，その極大イデアルによる完備化を $\hat{o}$ とかく．

$X_{\hat{o}} = X \times_Y \operatorname{Spec} \hat{o}$，$Z \otimes_k \hat{o}$ を $\operatorname{Spec} \hat{o}$ 上で考える

と，$H^1(Z, \Theta) = 0$ により，$\hat{o}/\hat{m}_{\hat{o}}$ 上一致しているから formal scheme $\hat{X}_{\hat{o}}$，$(Z \otimes_k \hat{o})^\wedge$ は同型．すると，比較定理によって，

$$X_{\hat{o}} \xrightarrow[\hat{o}]{\sim} Z \otimes_k \hat{o}.$$

$\hat{o}$ の分数体を $\hat{K}$ とする．$X_{\hat{K}}$ は $\hat{K}$ の代数多様体．それより，K のある分離閉を K' 上で

A) $\quad X_{K'} \xrightarrow[K']{\sim} Z \otimes_k K'.$

を示し，次に，何とか X_K まで下げてしまいたい．たとえば，WeilのDescenteによると，$G = \operatorname{Aut}(Z \otimes_k K')$ とおくとき

$$H^1(K, G) = 0$$

なら B) $\quad X_K \xrightarrow[K]{\sim} Z \otimes_k K$

がでて，有理型拡大であることが示されるのである．そこで //

の二つの操作は，現状では事例毎にあたる他ない。

A) の例．X が K 上の代数多様体で，K の拡大体 L にまであげると X_L が $\mathbb{P}^{n+1}_L$ 内の超曲面と L 上双正則とする．そのとき，K の分離閉包 K' まであげると $X_{K'}$ が $\mathbb{P}^{n+1}_{K'}$ 内の超曲面と K' 上双正則同型．$(n \geqq 2)$．

証明には，EGA II に予告された定理により，X は K 上，射影的であるから，Chow 多様体の理論が使える．X_L の $\mathbb{P}^{n+1}_L$ の超平面切断による因子 E を考えるとそれは L 上定義される．$c(E)$ の特殊化をとると，既約かつ，K' 上に定義された因子 E' がとれる．E' によって，$X_{K'}$ をうめこんでやればよい。

B) の例．

i) $Z = \mathbb{P}^{n-1}_k$．　$\mathrm{Aut}\, Z = GP(n-1)$，そこで，

$$\{1\} \to G_m \to GL(n) \to GP(n-1) \to \{1\}$$

これによって，

$$H^1(K, GL(n)) \to H^1(K, GP(n-1)) \to H^2(K, G_m)$$

K：C_1-体だから，$H^1(K, GP(n-1)) = 0$．これで，定理が P^{n-1} のとき示された．さて

ii) $Z = Q^{n-1}$．次の Lemma に注意する．

Lemma．完全交差の多様体 V の自己同型は，$\dim V \geqq 2$ のとき，ambient space P^N の自己同型より導かれる．(K3 曲面を除く)

∵) $\dim V = n$，$V \subset \mathbb{P}^N$ が各次数 $d_1, \dots, d_{N-n}$ の斉次多項式

から定まっているとする．その標準因子をK，超平面切断因子をHとおくと，

$$K \sim (N+1-\sum d_i)H \qquad (\text{線形同値の意味})$$

自己同型αにより，線型同値を除いてKは不変．

$$K \sim \alpha^* K \sim (N+1-\sum d_i)\alpha^* H \sim (N+1-\sum d_i)H$$

さて，$\dim V \geqq 2$ なら $h^{0,1}=h^{1,0}=0$，かつ torsion free により，$N+1 \neq \sum d_i$ なら，$\alpha^* H \sim H$．一方 $\dim \geqq 3$ なら Lefschetz, Groth. の定理により[ ] $\mathrm{Pic}(V) \simeq \mathbb{Z}$．それ故 $H^{(n)} = \prod d_i$ なるHは mod. 線型同値で唯一つ．よって除外されるのは，$\dim V = 2$，$N+1 = \sum d_i$．これはK3曲面である．

さて，Qを$\mathbb{P}^n$で定義する方程式をf，$CO(f) = \{\alpha \in GL(n+1),\ f(\alpha x) = c_\alpha f(x)\}$とおくと，

$$\{1\} \to G_m \to CO(f) \to \mathrm{Aut}(Q_f) \to \{1\}.$$

これによると，K：C₁-体により

$$\to H^1(K, G_m) \to H^1(K, CO(f)) \to H^1(K, \mathrm{Aut}(Q_f))$$
$$\to H^2(K, G_m)$$

$$\therefore\ H^1(K, CO(f)) \simeq H^1(K, \mathrm{Aut}(Q_f)).$$

一方 $H^1(K, CO(f)) \xrightarrow{\sim} \{g : \text{Kに係数をもつ2次形式}\}/\text{K-同値}$ は容易に $H^1(K; GL(n)) = 0$ から示されるから，

結論として，

X_K はK上の超2次曲面が結論され，結局 $k(X)/K$：有理的

次に定理I ii) を示す．このとき $H^1(Z,\Theta)=0$ なる有理曲面は実は数えあげることができる．実際，$\mathbb{P}^2_k$ より，n ケの一般の位置にある点 $p_1,p_2,\dots,p_n$ を blow up してできた曲面を考える．"一般の位置にある"を正しくのべると，

1) p_1 はどこでもよい，

2) p_2 は p_1 以外ならよい，

3) p_3 は p_1,p_2 を結ぶ直線 $l(p_1,p_2)$ 以外ならよい．

4) p_4 は $l(p_1,p_2)\cup l(p_2,p_3)\cup l(p_1,p_3)$ 〃

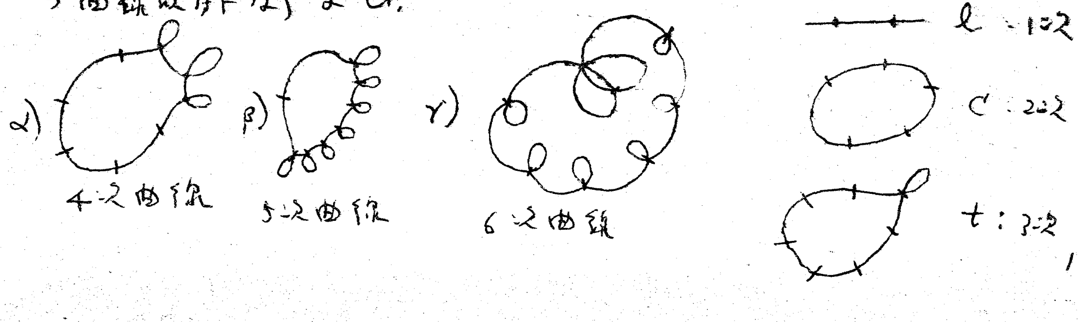
5) p_5 は $\cup l(p_i,p_j)$ $(1\le i,j\le 4)$ 〃

6) p_6 は $\cup l(p_i,p_j)$ $(1\le i,j\le 5)$ かつ，$p_1,p_2,\dots,p_5$ を通る2次曲線 $C(p_1,p_2,\dots,p_5)$ 以外ならよい．

7) p_7 は，$\cup l(p_i,p_j)$ $(1\le i\ne j\le 6)$，$\cup C(p_1,\dots,\hat{p_i},\dots,p_6)$ $(1\le i\le 6)$ 以外ならよい．

8) p_8 は，$\cup l(p_i,p_j)$ $(1\le i\ne j\le 7)$，$\cup C(p_1,\dots,\hat{p_i},\dots,\hat{p_j},\dots,p_7)$，$(1\le i\ne j\le 7)$ 更に p_i で二重点をもち他の点を通る3次曲線 $t(p_i;p_1,\dots,p_7)$ $1\le i\le 7$ 以外ならよい．

9) p_9 は，同様に l, c, t 以外に，次の三つの型 (α,β,γ) の曲線以外ならよい．



例

これからさきは，除外エヨケ点の集合が，Zariski 開集合にならないが，疎集合とあるだろう．ともかく，次の表をかくことができる．

$\mathbb{P}^2$ より一般の位置にある n ケの点を blow up してできた曲面 Z の表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
$\dim\Gamma(Z,\Theta)$	8	6	4	2	0	0	0	0	0	0	6
$\dim H^1(Z,\Theta)$	0	0	0	0	0	2	4	6	8	10	0
例外曲線の数	0	1	3	6	10	16	27	56	240	∞	0
$\mathrm{Aut}(Z)$	C					F				D	C
体	有理的					準有理的		擬有理的			有理的

$\mathrm{Aut}(Z)$：C とは，連続群の成分をもつこと，F とは有限群，Dとは離散（無限!）群を意味する．又 $n=*$ は，$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ の曲面であり，$\mathbb{P}^2$ から blow up でできるわけではない．大事なことは，$\dim H^1(Z,\Theta)=0$ なる有理曲面は上記の表でつきていることである．それをみるには，次の三つのことに注意すればよい．

イ）有理曲面の極小モデルは $\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^1$ 内に実現される．斉次座標を (x,λ) でかくと，$\lambda_0^e x_1+\lambda_1^e x_2=0$ 又は，$\lambda_0=0$（このとき $\mathbb{P}^2$）であり，容易に，$\dim H^1(Z,\Theta)=\left\{\begin{array}{ll} e-1 & (e\geqq 1) \\ 0 & (e=0) \end{array}\right.$，$=0$（$\mathbb{P}^2$）$\}$

ロ）Z を blow up してできた曲面 $Z'=Q_p(Z)$ は，

・$\dim H^0(Z,\Theta)-\dim H^0(Z',\Theta)=2,1,0$ のいずれか．

ハ）Z 有理曲面なら，

$$\dim H^1(Z,\Theta)=\dim H^0(Z,\Theta)+10-2c_1^2.$$

さて，A) の段階は，$X_{K'}$ 上に例外曲線があり，それらをすぼめると，$\mathbb{P}^2_{K'}$ になるから，結局 A) がたしかめられ，直接 Манин の結果を引用すると，除外例以外は X_K が K有理点をもち，かつ $k(X)/K$：有理的が確められる。

所で $n=5,6$ に応じた単有理拡大は，そのモデルを各々，$\mathbb{P}^4$ 内の (2,2)型の4次曲面，$\mathbb{P}^3$ 内の3次曲面にとれることから，又，その超平面切断が丁度標準因子の符号をかえたものになることよりわかるのであった [1]。なお，問題IIで，Z が有理曲面なら，$k(X)/k(Y)$：擬有理的が一般にわかる。

次に定理IIの証明をする。まず $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^n$-bundle の特徴付を与える。

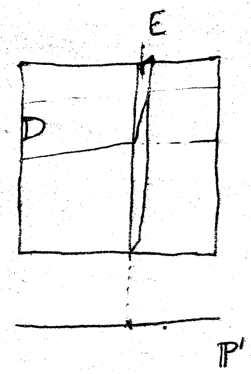
命題. V：非特異代数多様体とするとき，

V：$\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^n$-bundle $\Leftrightarrow$ i) $h^{0,1}(V)=0$, ii) $\rho(V)=2$*, iii) 次のような因子 E が存在する。i) $E\simeq\mathbb{P}^n$ ii) $E^{(n+1)}=0$.

ただし $\rho(V)$ = V の Picard 数.

∵) ⇒, さて，$\mathbb{P}^1$ 上の局所自由加群層 $\mathcal{E}$ により $V\xrightarrow{\sim}\mathbb{P}(\mathcal{E})$ と表されるから，$\mathrm{Pic}(V)\simeq\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^1)\times\mathbb{Z}\simeq\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$，これは，

*) $\rho(V)=\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\left(\mathcal{G}(V)/\mathcal{G}_a(V)\right)$ ：($\mathcal{G}(V)$: divisor group. $\mathcal{G}_a$: alg. ≡0 の divisor group) Picard number という.



$\rho(V)=2$ とともにその標準的生成元D, E をあたえる。Eは$\mathbb{P}^1$の一点より導かれた、ファイバーの因子であり、Dは、$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{E})$の基本層に応じた層である。

$[D]|_E \simeq \mathbb{P}^n$の超平面の因子, $[E]|_E \simeq 0$.

またEGA III §2 より $H^i(V,\mathcal{O}_V)\simeq H^i(\mathbb{P},\mathcal{O}_{\mathbb{P}}) = 0\ (i\geq 1)$.

⇐ の方を示そう。

$[E]|_E$ は$\mathbb{P}^n$の因子だから、これが0でないと、必ず $E^{(n)}\neq 0$. よって $[E]|_E=0$. すると、

$$0\to\mathcal{O}_V\longrightarrow\mathcal{O}_V(E)\longrightarrow\mathcal{O}_E\longrightarrow 0.$$

$H^1(V,\mathcal{O}_V)=0$ によって、$\dim H^0(V,\mathcal{O}_V(E))=2$. それでまず定理より Vは、有理多様体となることがわかった。

$|E|$の元はつねに既約である。

∵) $E\sim E_1+E_2$, とわかれたとする。*) とにかく$|E|$より導かれた正則写像によりVは射影的、その超平面切断をXとすると、$\rho V=2$ により一次の relation

$$aE_1+bE_2+cX\sim 0$$

が成立する。$E^{(n-1)}E_1=E^{(n-1)}E_2=0$, $E^{(n-1)}X\neq 0$ により $c=0$.

$aE_1+bE_2\sim 0$. よって

$$aE_1^{(n+1)}+bE_1^{(n)}E_2=0,\quad E_1^{(n+1)}+E_1^{(n)}E_2=0.$$

*) E_1：既約, E_2はE_1を成分に持たぬ正因子.

E_1：既約，E_2 が E_1 を成分にもたず，その台が共通分をもつから，$E_1^{(n)}E_2=0$．よって $b=a$．E：II因子だから $aE\sim a(E_1+E_2)\sim 0$ に矛盾する．

それで [4] [17] 定理　によって V は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^n$-bundle となる．

さて，定理IIの証明に入る．また $X_{\hat{\mathcal{O}}}\longrightarrow \mathrm{Spec}\,\hat{\mathcal{O}}$ で，抽象的変形の安定性を使うのである．E の V 内での法バンドルは Θ で，$H^1(V,\mathcal{O}_V)=0$ だから，安定性の条件をみたす*．さてあるファイバー $f^{-1}(y)=Z$ が，$\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-2}$-bundle だから，命題により，E がある．それを安定性で伸ばし $\mathcal{E}$ とする．$\mathcal{E}_y=E\simeq\mathbb{P}^{n-2}$ により $\mathcal{E}_{\hat{K}}\simeq\mathbb{P}^{n-2}_{\hat{K}}$．$\mathcal{E}_{\hat{K}}^{(n-1)}=E^{(n-1)}=0$．一方 $h^{0,1}$ の上半連続性より $h^{0,1}(X_{\hat{K}})=0$，$\rho(X_{\hat{K}})=2$．よって $X_{\hat{K}}$ では $\mathbb{P}^1_{\hat{K}}$ 上の $\mathbb{P}^{n-2}$ バンドル．A) の段階は，又 Chow 多様体の理論による．所で次のことがいえる．

命題2．V_K：$\mathbb{P}^1_K$ 上の $\mathbb{P}^n_K$-bundle なら，$H^1(K,\mathrm{Aut}(V_{\bar{K}}))=0$．

$\mathbb{P}^1$ 上のベクトルバンドルは Grothendieck の定理によると，線バンドルに分解する．そこで，標準的に次のように与えることができる．$\mathbb{P}^1=A^1\cup A^1$ と二つのアフィンにわけて，

$$A^1\times\mathbb{P}^n\quad\cup\quad A^1\times\mathbb{P}^n$$

$$(z,\zeta_0:\cdots:\zeta_n)=(z',\zeta_0':\cdots:\zeta_n')$$

---

*)．非特異多様体 V の formal deformation：$X\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$，
$\mathcal{O}$・complete，φ・smooth, proper flat．o：$\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}$ の閉点，$V=\varphi^{-1}(o)$．
(X,φ) を formal deformation of V，とよぶ．V の submanifold W その normal bundle $N_{V/W}$．$H^1(W,N_{V/W})=0$ なら，$Y\subset X/_{\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}}$，$(Y,\varphi\circ i)$ f.d. of W これ仮定した．

⇔ $z' = 1/z$, $\zeta_0' : \cdots : \zeta_n' = \zeta_0 : z^{d_1}\zeta_1 : \cdots : z^{d_n}\zeta_n$.

さて，$n \geqq 2$ のとき $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^n$−バンドル V の自己同型 α は，ファイバーを保つ。（$n=1$ のときは $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ を例外とするのだが。）それは，$n=1$ なら交点数の計算によれるし，$n \geqq 2$ なら，射影を π とするとき，$p\in\mathbb{P}^1$ に対して，$\pi\circ\alpha|_{\pi^{-1}(p)}$ $: \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^1$ よって 例 によると 定数！

そこで $z \longrightarrow z$ と仮定できる。

$$(z, \zeta_0:\zeta_1:\cdots:\zeta_n) \xrightarrow{\alpha} \left(z, \sum_{j=0}^{n} a_{0j}(z)\zeta_j : \sum_{j=0}^{n} a_{1j}(z)\zeta_j : \cdots : \sum_{j=0}^{n} a_{nj}(z)\zeta_j\right)$$

$\Delta = \det\left(a_{ij}(z)\right)$ ，は A^1 で零をとらないから常数.

$(z', \zeta_0':\zeta_1':\cdots:\zeta_n') \longrightarrow (z', \xi_0':\xi_1':\cdots:\xi_n')$ とおくと，

$$\xi_0' = a_{00}(1/z')\zeta_0' + a_{01}(1/z')z'^{d_1}\zeta_1' + \cdots + a_{0,n}(1/z')z'^{d_n}\zeta_n'$$

$$\xi_1' = a_{10}(1/z')z'^{-d_1}\zeta_0' + a_{11}(1/z')\zeta_1' + \cdots + a_{n,0}(1/z')z'^{d_n-d_1}\zeta_n'$$

$$\cdots\cdots$$

$$\xi_n' = a_{n,0}(1/z')z'^{-d_n}\zeta_0' + a_{n,1}(1/z')z'^{d_1-d_n}\zeta_1' + \cdots + a_{n,n}(1/z')\zeta_n',$$

そこで $\Delta'(z) = \det\left(a_{ij}(1/z')\right) = \Delta$
が直ちにわかる.

$d_1 \leqq d_2 \leqq \cdots \leqq d_n$ とならべておいて，$a_{ij}(z)$ は，高々 $d_j - d_i$ 次の多項式（負は 0 とおく）となることがわかる.

変換行列は

$$\begin{pmatrix} a_{00} & & & \\ & a_{11} & & * \\ & & \ddots & \\ & 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

よって次の完全列ができた.($G = V_K$ の自己同型群)

$$\{1\} \longrightarrow G_1 \longrightarrow G \longrightarrow GL(1) \longrightarrow \{1\}$$

$$\{1\} \longrightarrow G_m \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_1 \longrightarrow \{1\}$$

$$\{1\} \longrightarrow G_a^{N-n-1} \longrightarrow G_2 \longrightarrow G_m^{n+1} \longrightarrow \{1\}$$

ただし, $N = \sum_{i<j}(d_j - d_i + 1)$ ただし( )内負の時は0とおく.

これによって $H^1(K, G) = 0$.

§4. 代数的変形

ここでも問題を素朴にのべれば,

問題III. 有理多様体の代数的変形は有理的であるか?

もう少しきちんと定式化すると, k: 代数的閉体, そして, $X, Y, \cdots$ を k-代数的概形として, $f: X \longrightarrow Y$, 上への単位射, $0 \in Y$ を閉点, $X_0 = f^{-1}(0)$: 非特異多様体. 又, $1 \in Y$ を他の任意の閉点とする. 問題は,

X_0が有理的なら X_1は常に有理的か？

さて $n=\dim X_0=1, 2$ なら正しい。$n=2$の時の複素解析的の場合の証明は[ ]. 代数的の場合も類似に証明できる。

1. p_g, q は代数的変形の不変量である。*

∵) $12(p_g-q+1)=c_1^2+c_2$, は不変, c_1^2 も不変, 又 (Igusa ?) Betti 数 $b_2=c_2+4q-2$ も不変　よって, p_g, q は不変量.

2. $c_1^2\geqq 0$ として証明.

$\Sigma_1=\{y \mid X_y$: 有理的$\}$, とおくと, Castelnuovo (Zariski) の定理により Σ : 開集合. 次に $Y-\Sigma$: 開集合を示そう. $1\in Y-\Sigma$ も閉点とする. K_1 を X_1 の canonical divisor とする. $P_2(X_1)=\dim H^0(X_1, \mathcal{O}(2K_1))$ ($=l(2K_1)$, … と略記しよう) >0 であるから $l(-2K_1)=1$ or 0. イ) $l(-2K_1)=1$ なら $2K_1\sim 0$ (線型同値). さて, $\mathcal{L}=(\Omega^2_{X_Y})^{\otimes 2}$ とおくと, $\mathcal{L}_1\simeq(\mathcal{O}_X)_1$ を意味するから, [3]III§4 によって, $q=\dim H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})=0$ に注意すると, 1 の近傍 U があって $\mathcal{L}_U\simeq(\mathcal{O}_X)|_U$ Uの点 y に対して $P_2(X_y)=1$ 即ち $U\subset Y-\Sigma$.

ロ) $l(-2K_1)=0$, 半連続性の定理より, 1 の近傍 U があって $y\in U$ に対して $l(-2K_y)=0$, ただし, K_y は X_y の canonical divisor. Riemann Roch の不等式により,

$$P_3(X_y)\geqq -l(-2K_y)+3K_y^2+1=3c_1^2+1\geqq 1.$$

* たしか GB3 にあったようだが?

即ち $U \subset Y-\Sigma$

3. $c_1^2<0$ のとき、Enriques Mumford の定理によると、$g=0$ の極小モデルの c_1^2 は非負。そこで 2.0) 以下の議論を修正する。$\mathcal{O}=\mathcal{O}_{Y,1}$, $\mathrm{Spec}\,\hat{\mathcal{O}}$ 上に $X_{\hat{\mathcal{O}}} = X\times_Y \mathrm{Spec}(\hat{\mathcal{O}})$ をつくると、X_1にある例外曲線はそこにのびて $\hat{\mathcal{O}}$ 上で blow down できる。それをくりかえして、$c_1^2(X_1)\geq 0$. さて、Y の生成点 $*$ に応ずる X_* の不変量は、体をあげても変らない。よって $P_2(X_*) = P_2(X_{(\hat{\mathcal{O}})}) = P_2(X_1) > 0$ （$(\hat{\mathcal{O}})$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の分数体）よって $*\in Y-\Sigma$ これは、Σ：閉集合に矛盾。

$n\geq 3$ の時は小さい変形の時すら全くわからない。しかし、問題II — Geometric Criterion が容易に示され、かつ、ある種の安定性の定理を仮定するなら、次のような議論が可能である。

$\varphi: X\longrightarrow Y$, $X_0=\varphi^{-1}(o)$ ：有理的とする。

X_0 は $\mathbb{P}^{n-1}\times\mathbb{P}^1$ と双有理同値だから、そのグラフをとり、特異点を除去すると、次のようになる。X_0 に、非特異中心のモノイダル変換をくりかえすと、$\mathbb{P}^1$ 上の一般のファイバーが、$\mathbb{P}^{n-1}$ を非特異中心のモノイダル変換した、ファイバー空間になる。そこで、X_0 は、有理的だから、偶数次元のサイクルは皆代数的。多分、余次元 ≥ 2 の非特異部分多様体は 0 です だろ

う。それらを中心にモノイダル変換を繰返して、

$\varphi' : X' \longrightarrow Y$, $X_0' = \varphi'^{-1}(0)$ は X_0 に非特異中心のモノイダル変換してできた前述のもの、$\mathbb{P}^1$ への onto 写像があり その一般のファイバー F' は有理的。

さて、F'の定める線バンドル$[F']$をF'に制限すると、0。又 F': 有理的より、$H^1(F', \Theta_{F'}) = 0$ 安定性の定理により、F'は近傍に延長できる。$F_1' \subset X_1'$ としよう。さて、低次元の"有理性は変形により不変"を用いると、F_1'も有理的。又近傍だから、$\dim H^1(X_1', \mathcal{O}_{X_1'}) \leqq \dim H^1(X_0', \mathcal{O}_{X_0'}) = 0$. 又 $[F_1']|_{F_1'} = 0$。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_1'} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_1'}(F_1') \longrightarrow \mathcal{O}_{F_1'} \longrightarrow 0,$$

により、$\dim H^0(X_1', \mathcal{O}_{X_1'}(F_1')) = 2$.

それ故、$X_1' \longrightarrow \mathbb{P}^1$, かつ一般のファイバーは F': 有理的になる。そこで、Geometric Criterion によると、X_1'は有理的。よって X_1 も有理的!

文献表

[1] 現代代数幾何(数学論文集)　　東京 1968

[2] R. Goren, Algebraic deformation of a projective space
Journ. M. of Kyoto Univ. 8.1 (1968) 41~47.

[3] A. Grothendieck, E.G.A.

[4] ———, S.G.A.

[5] ———, T.D.T.E

[6] ———, GB (Groupes de Brauer)

[7] S. Iitaka　Deformations of compact complex surfaces

[8] K. Kodaira, Stability …

[9] ———, On the structure … I, II, III, IV

[10] D. Mumford, Appendix to the Zariski paper　Ann. Math

[11] ———, Introduction to Alg. Geo. (mimeographed)

[12] Ю. Манин, Rational surfaces over a perfect field. I.H.E.S

[13] M. Nagata, … Valuation …　Nagoya J. (Nakano volume)

[14] L. Roth, Algebraic Threefolds

[15] J. P. Serre　Cohomologie galoisienne

[16] O. Zariski　Criterion of rationality …　Amer. J.

[17] H. Hironaka　Smoothing …　Amer. J. Math 1968.

東大は封鎖中で文献を調べることもできなくなった。証明も粗いが後に　完全なものを出す予定だから御容赦願う。